

# DETERMINAÇÃO GRAVIMÉTRICA DO GEÓIDE NA REGIÃO DO MUNICÍPIO DO RIO DE JANEIRO

N. P. Santos<sup>1</sup> & I. P. Escobar<sup>2</sup>

O trabalho trata da determinação das ondulações geoidais na região do Município do Rio de Janeiro, cuja solução é obtida através da aplicação da fórmula de Stokes, definida em função das anomalias da gravidade para o modelo esférico da Terra. A integral de Stokes foi calculada empregando-se o método clássico de discretização da área, subdividida em células de 2' x 2' de extensão. Para a obtenção da parcela referente aos curtos e médios comprimentos de onda do espectro do geóide a informação gravimétrica terrestre foi anexada aos dados da área oceânica, obtidos através de satélite altimétrico GEOSAT. O efeito indireto das reduções gravimétricas foi calculado utilizando-se o Segundo Método de Condensação de Helmert, que conduz ao menor valor deste efeito. A parcela relativa aos longos comprimentos de onda foi calculada empregando-se os coeficientes geopotenciais do modelo OSU91A, completo até o grau e ordem 360. Os valores obtidos do geóide gravimétrico foram comparados com os valores das ondulações geoidais determinadas por rastreamento de satélites do sistema GPS sobre 4 pontos de cotas de nível conhecidas, e revelaram uma precisão de  $\pm 6$  cm nas diferenças entre os pontos utilizados na comparação.

**Palavras-chave:** Gravimetria; Geodésia Física; Geóide.

**GRAVIMETRIC GEOID DETERMINATION IN THE MUNICIPALITY OF RIO DE JANEIRO AND NEARBY REGION-** *Geoidal undulations have been determined in the municipality of Rio de Janeiro and nearby region, using Stokes formula, which is defined as a function of gravity anomalies. The computation of Stokes integral was carried out by the method of compartmentalization, applied to the researched area, subdivided into cells of 2' x 2'. Field gravimetric information was integrated to ocean data from GEOSAT satellite in order to get the medium and short wavelength components of the geoid spectrum. The long wavelength component was computed through the OSU91A geopotential model, complete to order and degree 360. The indirect effect of gravimetric reduction was obtained using Helmert's Second Condensation Method. Comparison of the results with data obtained from the GPS/levelling derived geoidal heights points out a difference of  $\pm 6$  cm (rms) in the benchmarks.*

**Key words:** Gravimetry; Physical Geodesy; Geoid.

<sup>1</sup> CNPq - Observatório Nacional  
Departamento de Geofísica  
Rua General José Cristino, 77 - São Cristóvão  
CEP 20921-400, Rio de Janeiro, RJ  
e-mail: newton@dge1.on.br

<sup>2</sup> Universidade do Estado do Rio de Janeiro  
Rua São Francisco Xavier, 524 - Maracanã  
CEP 20559-900, Rio de Janeiro, RJ

## INTRODUÇÃO

O conhecimento do campo da gravidade terrestre é fundamental como instrumento para a determinação das dimensões e forma da Terra, assim como nos fornece subsídios para investigações acerca de seu comportamento dinâmico.

O geóide, comumente utilizado em nossas atividades como referencial de altimetria, é uma superfície equipotencial do campo da gravidade terrestre, coincidente com o nível imperturbado do mar, supostamente prolongado por sob os continentes. Nós podemos supor esta superfície estendendo-se por sob a parte continental, por exemplo, na forma de um sistema de canais hipotéticos interligados (Bomford, 1977; Rikitake et al., 1985). A superfície imperturbada do mar pode ser considerada como uma matéria homogênea de água que está sujeita à ação da gravidade terrestre (campos gravitacional e centrífugo) e, portanto, atingindo um estado de equilíbrio tal que é assumida como superfície equipotencial. Obviamente que essa superfície fechada, apesar de ser contínua e suave, não é analítica em virtude da variação na densidade das massas terrestres, o que implica em ondulações na superfície geoidal. Não sendo conhecida matematicamente, a superfície do geóide não serve, portanto, para o posicionamento planimétrico. No entanto, sendo uma superfície de nível é ideal como referencial altimétrico e é usada para a representação da topografia terrestre e do mar.

O posicionamento altimétrico de um ponto na superfície topográfica é dado por sua distância ao geóide contada na vertical - altitude ortométrica. Por outro lado, o posicionamento planimétrico deste está vinculado à superfície do elipsóide de revolução, referencial adotado internacionalmente como aproximação da figura da Terra. O método tradicional de determinação da altitude ortométrica envolve a materialização do geóide a partir de marégrafos, e de uma laboriosa operação topográfica - nivelamento geométrico, onde os valores das altitudes são transportados dos marégrafos de origem até o ponto considerado. Estes contêm registros periódicos dos níveis médios marinhos.

O emprego de rastreadores do Sistema de Posicionamento Global (GPS) dinamizou as operações dispendiosas de posicionamento terrestre, tornando possível a determinação plani-altimétrica de forma ágil e precisa. Contudo, as altitudes obtidas com o GPS - chamadas altitudes geométricas - referem-se à superfície do elipsóide, e não à do geóide. Para a obtenção da altitude ortométrica utilizando o GPS é

necessário, no entanto, o conhecimento das ondulações ou alturas geoidais, que são as distâncias de separação entre as duas superfícies. Desta forma, o rastreamento por GPS pode ser empregado como efetivo método de posicionamento planimétrico e altimétrico. Por conseguinte, um importante objetivo para a determinação do geóide como apoio a trabalhos geofísicos e de engenharia e cartografia é, dentre outros, a obtenção da altitude ortométrica (ou referência de nível) através da combinação de informação gravimétrica com as altitudes determinadas por GPS.

Não obstante esta finalidade, o conhecimento das ondulações (ou deformações) geoidais pode também contribuir para a definição das estruturas geodinâmicas, cujo assunto tem sido fonte de inúmeros trabalhos desenvolvidos na última década. Por exemplo, as observações das anomalias geoidais podem fornecer uma importante injeção para o modelamento e análise das propriedades da litosfera continental e oceânica e a astenosfera (Anderson & Cazenave, 1986). Em Lambeck (1988) é discutida a correlação existente entre o campo da gravidade total (ou a forma do geóide) com o fluxo térmico na superfície terrestre, o campo magnético, a tectônica de placas e as anomalias na velocidade sísmica, para a interpretação do estado isostático ou das tensões ("stress") originadas na crosta e litosfera. Inversamente, modelos globais do geóide podem também ser aprimorados pela consideração de parâmetros geodinâmicos, tais como a viscosidade da litosfera e as forças que originam os movimentos tectônicos. Em Karpychev & Fleitout (1996) é averiguado o efeito da inclusão das velocidades das placas tectônicas na determinação dos longos comprimentos de onda do espectro do geóide.

A investigação das ondulações geoidais na região do Município do Rio de Janeiro é o objeto deste trabalho, cuja área tem a vantagem de possuir um grande acervo de material gravimétrico e cartográfico, essenciais para o traçado da feição geoidal com uma precisão ao nível do cm, e, portanto, da mesma ordem de precisão do equipamento GPS.

Algumas informações adicionais a este artigo poderão ser obtidas em Santos (1997), em cujo trabalho este se baseia.

### Potencial Anômalo

Da mesma forma que o campo da gravidade terrestre é dotado de potencial escalar, chamado potencial de gravidade ( $W$ ) ou geopotencial, o campo atribuído ao elipsóide de referência produz potencial teórico denominado potencial de gravidade normal ( $U$ )

ou esferopotencial (Gemael, 1981), que, também, é representado pelas componentes gravitacional e centrífuga. Em um ponto  $P$  qualquer da superfície terrestre, o esferopotencial  $U_p$  difere do geopotencial  $W_p$  em virtude da heterogeneidade na distribuição de massas da Terra e do afastamento geóide - elipsóide. Essa diferença é o potencial anômalo ou potencial perturbador  $T_p$  (Heiskanen & Moritz, 1967; Gemael, 1981). Assim, temos que:

$$T_p = W_p - U_p \quad (1)$$

Se o potencial centrífugo é o mesmo nas expressões de  $W$  e  $U$ , então, na diferença, restará a parte atrativa, que é harmônica. Portanto,  $T$  é uma função harmônica no espaço exterior às massas e satisfaz à equação de Laplace, ou seja:

$$\Delta T = 0 \quad (2)$$

Certamente que um ponto na superfície terrestre poderá se situar acima ou abaixo do geóide, todavia, o efeito das massas é excluído matematicamente na operação de redução ao nível deste.

A Fig. 1 mostra as superfícies do geóide e do elipsóide de referência, em seção normal, com as respectivas grandezas envolvidas, na qual:

$P$  - projeção do ponto gravimétrico sobre o geóide

$Q$  - projeção de  $P$  sobre o elipsóide

$N$  - ondulação geoidal  $\overline{PQ}$

$n_P, n_Q$  - respectivamente, vertical em  $P$  e normal em  $Q$

$i$  - desvio da vertical

$g_P$  - vetor gravidade em  $P$

$\gamma_P, \gamma_Q$  - respectivamente, vetores gravidade normal em  $P$  e  $Q$

A comparação entre os módulos de  $\Delta g_P$  e  $\Delta g_Q$ :

$$\Delta g_P = g_P - \gamma_Q \quad (3)$$

definida como anomalia da gravidade, é a diferença entre a gravidade real em  $P$  (no geóide) e a gravidade normal em  $Q$  (no elipsóide de referência). O ângulo entre os dois vetores é praticamente igual ao desvio da vertical, uma vez que  $\gamma_P$  e  $\gamma_Q$  têm, aproximadamente, a mesma direção. O valor do desvio da vertical pode variar entre 1" e 10" em terreno plano (Torge, 1980). A fórmula que correlaciona a altura geoidal e o potencial anômalo:

$$T_p = \gamma_Q N \quad (4)$$

é conhecida como fórmula de Bruns.

A primeira derivada da Eq. (1) em relação à altitude geométrica  $h$  contada ao longo da normal (na Fig. 1,  $h$  e  $N$  se confundem), juntamente com a fórmu-

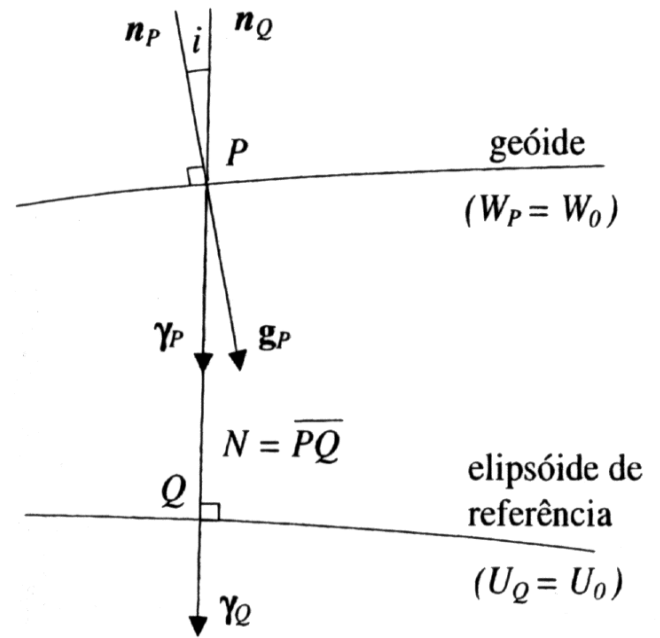


Figura 1 - Seção normal das superfícies do geóide e elipsóide de referência.

Figure 1 - Normal section of geoid and reference ellipsoid surfaces.

la de Bruns, fornece:

$$\frac{\partial T_p}{\partial h} - \frac{T_p}{\gamma_Q} \frac{\partial \gamma_Q}{\partial h} + \Delta g = 0 \quad (5)$$

chamada equação fundamental da Geodésia Física. Esta equação envolve uma combinação linear de  $T$  e sua derivada da normal  $\partial T / \partial h$ , sendo solução do terceiro problema do valor de contorno da Teoria do Potencial (problema de Hilbert). Como a Eq. (5) é válida, somente, para o cálculo do potencial anômalo no espaço exterior às massas, ela estabelece a condição de contorno para o cálculo de  $T$  no geóide, uma vez que as anomalias da gravidade observadas na superfície são matematicamente reduzidas a ele.

O desenvolvimento em série do potencial anômalo  $T$  nos permite obter as expansões em harmônicos esféricos da anomalia da gravidade  $\Delta g$  e da altura geoidal  $N$  (Heiskanen & Moritz, 1967). Temos que:

$$T(r, \theta, \lambda) = \sum_{n=2}^{\infty} \left( \frac{R}{r} \right)^{n+1} T_n(\theta, \lambda), \quad r > R \quad (6)$$

onde os  $T_n(\theta, \lambda)$  são os harmônicos de superfície de grau  $n$  do potencial  $T$ ,  $R$  é o raio médio terrestre e  $r$  é o raio vetor do ponto de coordenadas  $(\theta, \lambda)$ , respecti-

vamente, co-latidade e longitude geocêntricas. A expansão da anomalia da gravidade será dada por (Heiskanen & Moritz, 1967):

$$\Delta g = \Delta g(r, \theta, \lambda) = \frac{\partial T}{\partial r} = \sum_{n=2}^{\infty} \Delta g_n = \frac{1}{r} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} T_n(\theta, \lambda), \quad (7)$$

onde  $\Delta g_n$  é o termo genérico da expansão de  $\Delta g$ . Substituindo a fórmula de Bruns (Eq. 4) na Eq. (6) obtemos a expansão harmônica da altura geoidal  $N$ :

$$N = N(r, \theta, \lambda) = \frac{1}{\bar{\gamma}} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} T_n(\theta, \lambda), \quad (8)$$

onde  $\bar{\gamma}$  é a gravidade teórica média para toda a Terra.

Os harmônicos esféricos de Laplace  $S_n(\theta, \lambda)$  podem ser expressos através do desenvolvimento (Stokes, 1849; Heiskanen & Moritz, 1967):

$$S_n(\theta, \lambda) = \frac{2n+1}{4\pi} \int_{\lambda'=0}^{2\pi} \int_{\theta'=0}^{\pi} f(\theta', \lambda') P_n(\cos \psi) \times \sin \theta' d\theta' d\lambda' \quad (9)$$

onde  $\psi$  é a distância esférica entre dois pontos  $P(\theta, \lambda)$  e  $P'(\theta', \lambda')$  da superfície da Terra. Introduzindo as anomalias da gravidade  $\Delta g$  e  $\Delta g_n$  na Eq. (9), obtemos:

$$\Delta g_n = \frac{2n+1}{4\pi} \int_{\lambda'=0}^{2\pi} \int_{\theta'=0}^{\pi} \Delta g P_n(\cos \psi) \times \sin \theta' d\theta' d\lambda'. \quad (10)$$

Fazendo  $r = R$  (ponto na superfície terrestre) nas Eqs. (7) e (8), substituindo na Eq. (10), teremos:

$$N = \frac{R}{4\pi\bar{\gamma}} \int_{\lambda'=0}^{2\pi} \int_{\theta'=0}^{\pi} \left[ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n+1}{n-1} P_n(\cos \psi) \right] \times \Delta g \sin \theta' d\theta' d\lambda'. \quad (11)$$

O termo entre colchetes envolvendo os harmônicos zonais é chamado função de Stokes,  $S(\psi)$ . Substituindo este termo na Eq. (11), obtemos uma das formas da equação de Stokes (1849):

$$N = \frac{R}{4\pi\bar{\gamma}} \int_{\lambda'=0}^{2\pi} \int_{\theta'=0}^{\pi} \Delta g S(\psi) \sin \theta' d\theta' d\lambda' \quad (12)$$

## METODOLOGIA

Foi empregada aqui a metodologia clássica na solução da integral de Stokes para os dados gravimétricos locais. Neste método, a área circunvizinha a um ponto gravimétrico é subdividida em compartimentos onde se estimam as respectivas anomalias médias da gravidade. A integral de Stokes é substituída pelo somatório discreto das contribuições individuais de cada compartimento para o cálculo da altura geoidal naquele ponto. Os compartimentos são representados por células delimitadas pelos meridianos e paralelos geográficos igualmente espaçados, e a estimativa da anomalia de ar livre média em cada célula é obtida por interpolação de seus valores. A parcela relativa ao efeito indireto no valor de  $N$  é considerada utilizando-se o Segundo Método de Condensação de Helmert, que conduz ao menor valor deste efeito na redução gravimétrica. Estes dados, anomalia local da gravidade e efeito indireto, que correspondem aos curtos comprimentos de onda do espectro do geóide, são combinados com os valores de altura geoidal e anomalia da gravidade, que representam os longos comprimentos de onda, que são obtidos através das fórmulas de expansão do geopotencial em harmônicos esféricos. Para o cálculo desta expansão foram utilizados os coeficientes do modelo de geopotencial OSU91A da Ohio State University (Rapp et al., 1991), completo até o grau e ordem 360. O valor efetivo de  $N$  em cada célula é obtido, então, pela soma de três parcelas, cujo cálculo pode ser sumarizado da seguinte forma (Sideris & She, 1995):

(a) Cálculo da componente esferoidal, obtida através da expansão do geopotencial em harmônicos esféricos (Rapp et al., 1991);

(b) Cálculo da componente relativa às anomalias da gravidade, obtida através da fórmula de Stokes. Este cálculo pode, ainda, ser subdividido nas seguintes parcelas (Sá & Molina, 1995; Sideris & She, 1995):

(i) dedução das anomalias da gravidade devidas ao modelo de geopotencial. Uma vez que na computação das anomalias referentes aos dados terrestres (curtos comprimentos de onda) está incluída, também, a informação referente ao modelo de geopotencial (longos comprimentos de onda), devemos excluir esta no cálculo daquelas, para que não sejam processadas duplamente. Esta técnica é conhecida como “remoção” e “restauração” das massas topográficas (“remove-restore technique”), onde os sinais de referência são removidos das observações para criar dados residuais. O modelo matemático é aplicado, então, aos resíduos,

após o qual, o efeito dos sinais removidos é restaurado (Hees, 1986);

(ii) contribuição dos dados gravimétricos locais (valores de anomalias residuais de Helmert); e

(iii) contribuição devida à correção topográfica.

(c) E, finalmente, o cálculo da componente relativa ao efeito indireto da redução gravimétrica. A determinação de  $N$  em um ponto de coordenadas  $(\phi, \lambda)$  pode, então, ser expressa por:

$$N(\phi, \lambda) = N_{Modelo}(\phi, \lambda) + N_{Stokes}(\phi, \lambda) + N_{Efeito}(\phi, \lambda). \quad (13)$$

A componente da altura geoidal referente ao modelo de geopotencial em um ponto  $(\phi, \lambda)$  (Torge, 1980; Sideris & She, 1995) é dada pela fórmula de Bruns, substituída na expansão de  $T$ , que fornece:

$$N_{Modelo}(\phi, \lambda) = \frac{T(\phi, \lambda)}{\gamma(\phi, \lambda)} = R \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^n (\delta J_{nm} \cos m\lambda + \delta K_{nm} \text{sen} m\lambda) P_{nm}(\text{sen}\phi), \quad (14)$$

As diferenças dos coeficientes harmônicos esféricos  $\delta J_{nm}$  e  $\delta K_{nm}$  para  $W$  e  $U$  (Schwarz et al., 1990) são dadas por:

$$\begin{aligned} \delta J_{2n} &= J_{2n}^{(U)} - J_{2n}^{(W)}, \\ \delta J_{nm} &= J_{nm}^{(W)}, \\ \delta K_{nm} &= K_{nm}^{(W)}, \end{aligned} \quad (15)$$

onde  $J_{2n}^{(U)}$  e  $J_{2n}^{(W)}$  são os coeficientes zonais pares, e  $J_{nm}$  e  $K_{nm}$  são os demais coeficientes.

O termo  $\Delta g_{Modelo}$ , calculado a partir da expansão da anomalia da gravidade em harmônicos esféricos (Eq. 7), fica igual a:

$$\Delta g_{Modelo}(\phi, \lambda) = \bar{\gamma} \sum_{n=2}^{\infty} (n-1) \sum_{m=0}^n (\delta J_{nm} \cos m\lambda + \delta K_{nm} \text{sen} m\lambda) P_{nm}(\text{sen}\phi). \quad (16)$$

O somatório dos termos referentes ao grau  $n$  dos harmônicos esféricos é truncado no valor 360, cujo modelo OSU91A possui 130682 coeficientes geopotenciais (Mainville et al., 1992). Esse detalhe de informação fornece resolução espectral da ordem de 30', o que corresponde a aproximadamente 50 km na superfície terrestre. A fórmula de Stokes, modificada

para a discretização dos elementos de superfície, assume a forma (Sideris & She, 1995):

$$N_{Stokes}(\phi, \lambda) = \frac{R\Delta\phi\Delta\lambda}{4\pi\bar{\gamma}} \sum_{\phi=\phi_1}^{\phi_M} \sum_{\lambda=\lambda_1}^{\lambda_N} S(\psi) \Delta g(\phi, \lambda) \times \cos\phi. \quad (17)$$

A área de trabalho foi subdividida em  $M = 14$  paralelos e  $N = 25$  meridianos, e possui 350 células com amplitude 2' x 2'. O cálculo das anomalias médias  $\Delta g(\phi, \lambda)$  em cada célula compreende o cálculo das anomalias de ar livre das observações,  $\Delta g_{ArLivre}$ , da correção topográfica,  $C_{Top}$ , e da parcela referente ao modelo OSU91A,  $\Delta g_{Modelo}$ . Assim, teremos:

$$\Delta g(\phi, \lambda) = \Delta g_{ArLivre} + C_{Top} - \Delta g_{Modelo}. \quad (18)$$

O valor do efeito indireto é compensado diretamente no cálculo de  $N$ . Considerando as massas "condensadas" pelo método de Helmert, a expressão para o cálculo do efeito indireto é:

$$\begin{aligned} N_{Efeito}(\phi, \lambda) &= -\frac{\pi G \rho h_p^2}{\bar{\gamma}} + \\ &+ \frac{G \rho \Delta x \Delta y}{6\bar{\gamma}} h_p^3 \sum_{x=x_1}^{x_N} \sum_{y=y_1}^{y_M} \frac{1}{s^3} - \\ &- \frac{G \rho \Delta x \Delta y}{6\bar{\gamma}} \sum_{x=x_1}^{x_N} \sum_{y=y_1}^{y_M} \frac{h^3}{s^3}, \end{aligned} \quad (19)$$

onde  $G$  é a constante gravitacional e  $\rho$  é a densidade constante das massas topográficas. Esta fórmula discreta é apresentada em (Sideris & She, 1995) para o cálculo de  $N_{Efeito}$  num ponto  $P(x_p, y_p)$  de altitude  $h_p$ , dada uma grade de  $M \times N$  valores de alturas, onde  $s$  é a distância plana entre  $P$  e um ponto da grade de altura  $h$ .

### Determinação do Geóide pelo Método de Stokes

É conveniente mencionar as restrições de aplicação prática impostas pela técnica de Stokes, assim como as suas implicações na determinação do geóide: (a) Stokes utiliza um modelo de aproximação esférico. Tratando o elipsóide de referência como uma esfera,

sabendo-se que ambos diferem de uma quantidade da ordem do achatamento terrestre ( $\approx 0,003$ ), o erro relativo no valor absoluto da altura geoidal  $N$  será da ordem de  $0,003 \times N$ . Considerando que  $N$  raramente excede o valor de 100 m em todo o globo terrestre (Heiskanen & Moritz, 1967), a aproximação esférica não produzirá um erro superior a 1 metro na altura geoidal.

(b) Os limites de integração na fórmula de Stokes (Eq. 12) se estendem a toda a superfície da Terra. Portanto, a área dos continentes e oceanos deveria ser totalmente provida de valores de anomalias da gravidade, o que se torna impraticável. Os levantamentos gravimétricos, na maior parte das vezes, conduzem a uma distribuição geográfica não-homogênea das estações de gravidade (Hees, 1986), realidade da qual dispomos para a determinação do geóide. Esta restrição de ordem prática, no entanto, é resolvida pela “discretização” dos valores da gravidade, aproximando-se a integral de superfície por um somatório discreto (vide Eq. 17). Por outro lado, a otimização na distribuição das estações também melhora a estimativa das anomalias médias da gravidade. Em áreas muito extensas, uma distribuição não-homogênea (ou insuficiente) dos dados gravimétricos pode até restringir o uso da técnica de Stokes. Esta dificuldade, no entanto, favorece cada vez mais a aplicação deste método em determinações locais do geóide (vide Arabelos & Tziavos., 1983; Denker & Wenzel, 1987; Gil et al., 1993; Sá & Molina, 1995).

(c) O método de Stokes requer que o potencial anômalo seja uma função harmônica no espaço exterior às massas topográficas, o que implica na necessidade de remoção total das massas externas ao geóide para a sua determinação. O efeito da topografia, que se constitui no maior obstáculo à aplicação da técnica de Stokes, pode, no entanto, ser eliminado (ou minimizado) através dos métodos de redução dos valores da gravidade ao nível do geóide. Por outro lado, baseando-se na lei da gravitação de Newton, Stokes (1849) não assumiu nenhuma hipótese a respeito da distribuição interna das massas no geóide.

(d) Para determinações geoidais precisas em regiões de relevo acentuado, o efeito indireto deve ser necessariamente considerado no cálculo de  $N$ . A não inclusão deste efeito pode produzir erros de até 10 vezes a altura geoidal (Heiskanen & Moritz, 1967). No presente trabalho foi aplicado o método de condensação das massas topográficas sobre o geóide, sugerido pelo próprio Stokes (1849) e desenvolvido por F. R. Helmert (Heiskanen & Moritz, 1967; Gemael, 1981), tendo em vista que este é o método que gera o menor valor de

efeito indireto na redução gravimétrica.

(e) Considerando o elipsóide como o modelo de forma da Terra, Stokes adotou como hipóteses dinâmicas e geométricas, que haja coincidência dos respectivos eixos de rotação, centros de gravidade de massa e volume, potenciais de gravidade na superfície, e das massas. O elipsóide adotado pela IUGG em 1979, o “Geodetic Reference System” 1980 (Moritz, 1984), utilizado aqui, baseia-se na teoria de um elipsóide equipotencial que engloba a massa total da Terra (incluindo a massa atmosférica), e atende às exigências requeridas para a aplicação da teoria de Stokes.

### Dados Utilizados - Levantamento Gravimétrico

A maior parte da informação gravimétrica é oriunda de levantamento realizado em 1991, em trabalho de cooperação entre o Observatório Nacional e a Escola de Instrução Especializada do Exército - EsIE/MEx, onde foram observados 310 pontos dentro do município do Rio de Janeiro com espaçamento médio de 2400 m, utilizando-se gravímetros LaCoste & Romberg. Na área norte da região (fora do município) foram incluídos 36 valores de anomalias de ar livre provenientes de levantamentos anteriormente realizados pelo ON, e, na área oceânica (ao sul do município) foram utilizados dados de anomalias de ar livre obtidas do satélite altimétrico GEOSAT da Marinha dos Estados Unidos, dispostos numa grade de pontos regularmente espaçados de 2' em 2'. A Fig. 2 ilustra a localização das estações gravimétricas terrestres, mostrando uma distribuição espacial bem homogênea na área, assim como os dados de GEOSAT utilizados no trabalho.

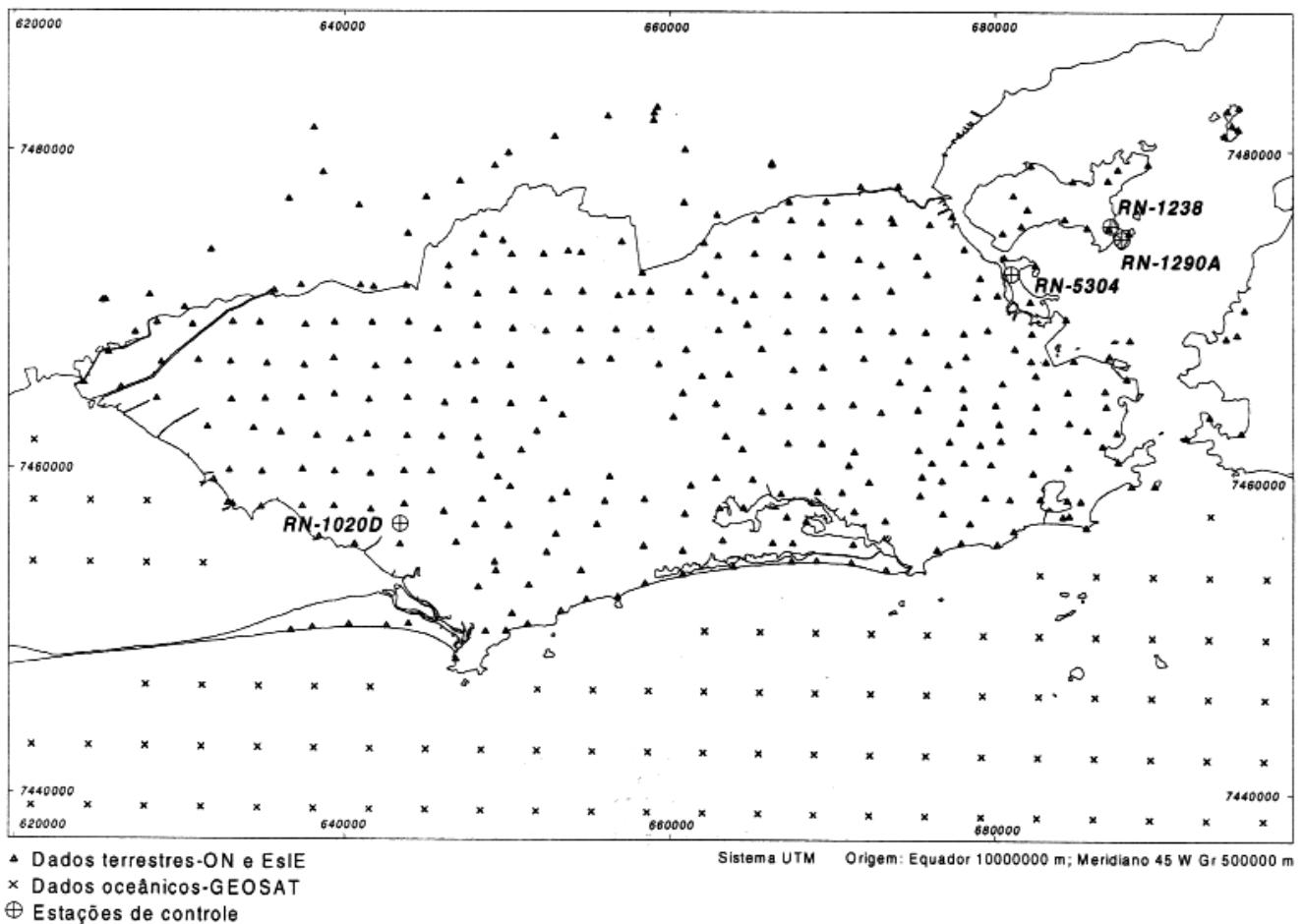
O posicionamento plani-altimétrico dos dados terrestres foi obtido a partir das cartas do município do Rio de Janeiro em escalas de 1:2.000 e 1:10.000, sendo que, dos 310 pontos levantados com a EsIE, 14 são coincidentes com referências de nível (RRNN) de alta precisão determinadas pelo Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística - IBGE. O conjunto dos dados terrestres, corrigidos dos efeitos da topografia e da atmosfera, geraram os valores das anomalias médias residuais de ar livre calculadas para os centros das células de 2' x 2' de extensão, na qual a área de trabalho foi subdividida. Estes dados, anexados à informação da área oceânica deram origem a uma grade que contém 350 valores de anomalias de ar livre (14 no sentido norte-sul e 25 no sentido oeste-leste), abrangendo uma área de 70 km x 30 km. Estes valores são combinados com os dados obtidos de duas outras grades de pontos, relativas ao efeito indireto e ao modelo de geopotencial

OSU91A completo até o grau e ordem 360. Para os cálculos da correção topográfica e efeito indireto foi gerado um modelo digital do terreno, obtido a partir das cartas em escala 1:50.000, editadas pela Diretoria do Serviço Geográfico do Exército - DSG/MEX. O dados referentes ao modelo de geopotencial e efeito indireto foram calculados utilizando-se os programas GRAVTPC e IND, desenvolvidos pela equipe do Dr. M. Sideris (University of Calgary). Foi adotado o sistema GRS80 ("Geodetic Reference System 1980") como superfície de referência para os cálculos das anomalias e modelo de geopotencial. A correção topográfica foi calculada através do programa TRITER (Rupert, 1988), e o efeito atmosférico foi corrigido utilizando-se a tabela de correção atmosférica editada em (Moritz, 1984). Finalmente, foi produzido o mapa das ondulações geoidais, ilustrado na Fig. 3, em cujo traçado foi usada a técnica de interpolação pelo inverso do quadrado da distância, utilizando-se o programa WINSURF v.5.01 da Golden Software Inc.

## Discussão

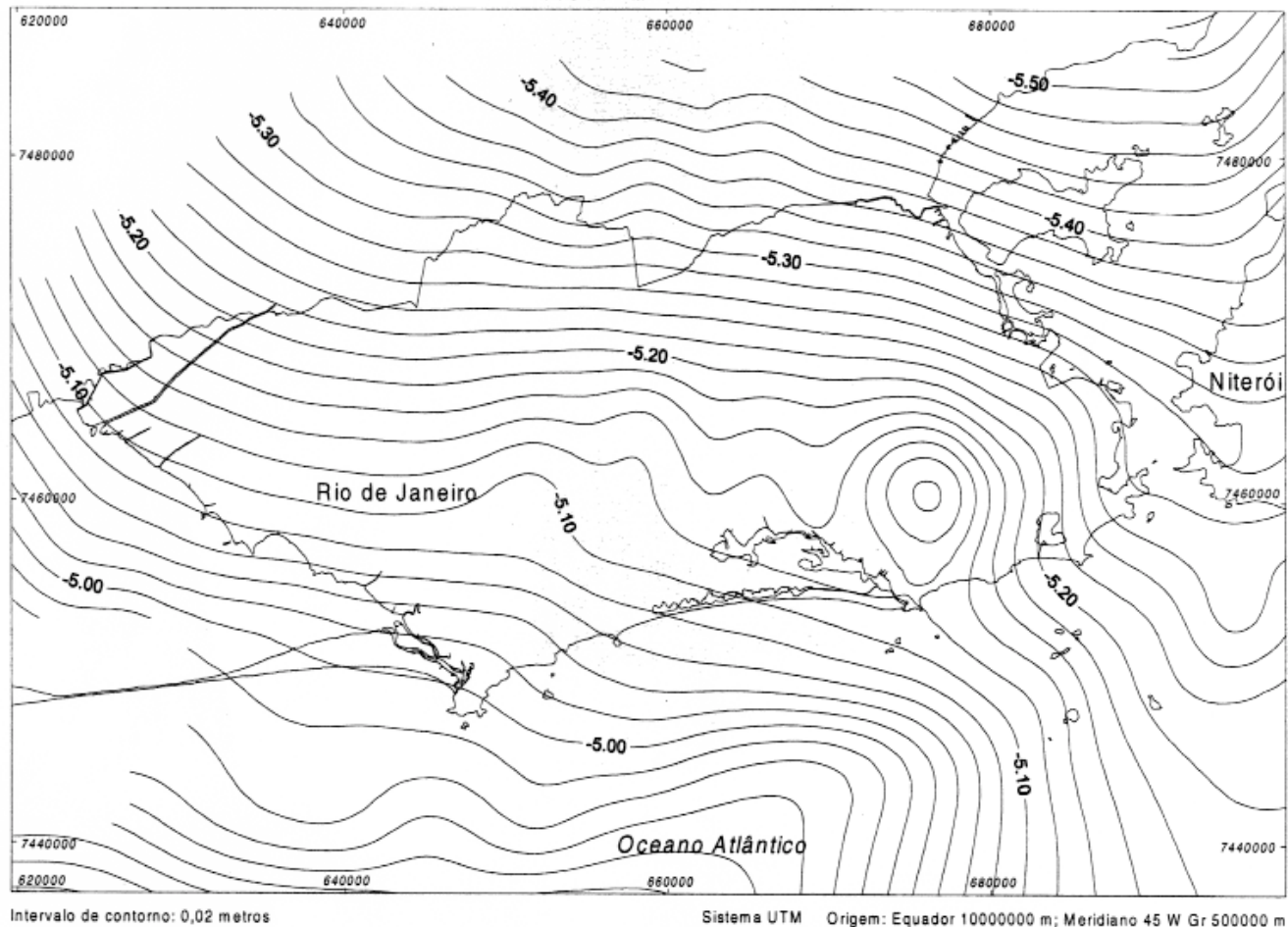
Na Fig. 3 se observa que o gradiente máximo em toda a área é de 0,50 m, cujos valores variam entre -5,00 m e -5,50 m. Estes valores estão coerentes com os dados obtidos no trabalho de Sá & Molina (1995) na determinação do geóide gravimétrico no Estado de São Paulo. O trecho aparentemente mais acidentado no mapa situa-se na região do Maciço da Tijuca (vide Fig. 3, na área entre as coordenadas UTM 650000 ' 7455000 m e UTM 680000 ' 7465000 m), provavelmente, em consequência da estrutura geológica local, composta basicamente por rochas máficas e ultra-máficas de alta densidade. Entretanto, este gradiente é de apenas 10 cm; no restante da área, apesar da resolução de 2 cm entre as isolinhas, a superfície geoidal comporta-se bastante suavemente.

As isolinhas são mostradas em duas perspectivas distintas (Figs. 4 e 5), para se ter uma noção tridimensional das ondulações da superfície geoidal. Na Fig. 4 o ponto de vista situa-se a sudoeste (SW) da



**Figura 2** - Distribuição dos pontos gravimétricos terrestres e oceânicos.

*Figure 2* - Gravimetric terrestrial and ocean data.



**Figura 3** - Geóide gravimétrico da região do Município do Rio de Janeiro.

**Figure 3** - Gravimetric geoid in the Municipality of Rio de Janeiro and nearby region.

região, e, na Fig. 5, a noroeste (NW). Estas figuras fornecem uma visão espacial da forma do geóide e nos permite notar a sua suavidade. O trecho acidentado, mencionado antes, é melhor ainda percebido na Fig. 4, que apresenta um exagero na escala vertical, embora o acidente mostrado no mapa seja da ordem de, apenas, 10 cm.

### Precisão do Mapa Geoidal

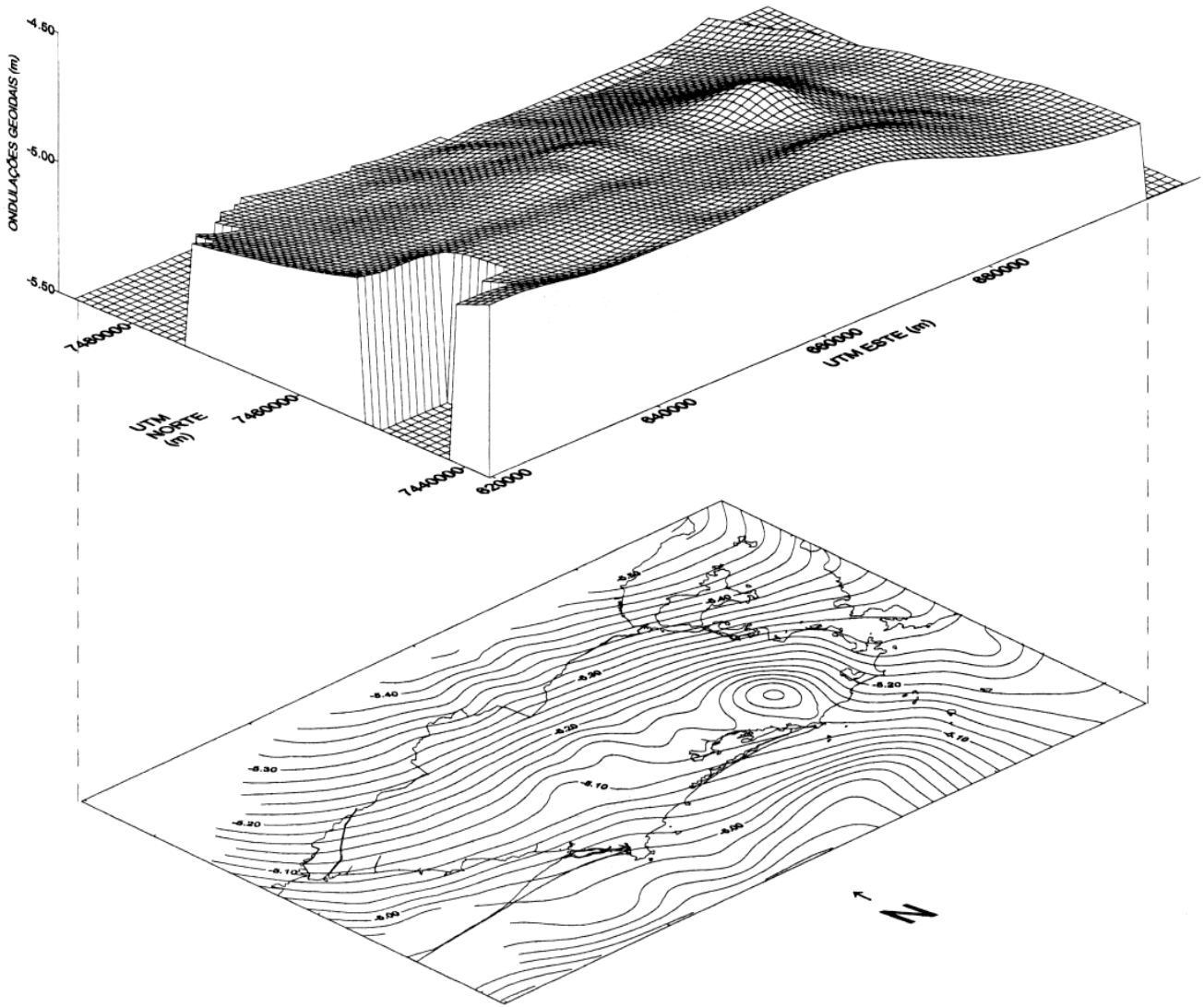
A acurácia do geóide gravimétrico (Fig. 3) pode ser verificada através da comparação com uma outra técnica de determinação geoidal. Neste outro método, o geóide é derivado a partir de informação obtida de rastreamento GPS sobre referências de nível. São utilizadas estações de controle de campo onde se conhecem os valores das altitudes ortométricas (dadas pelas referências ou cotas de nível) e das respectivas altitudes geométricas (dadas pelos rastreadores GPS). A diferença entre ambas é igual à altura geoidal naquela estação.

Neste trabalho foi realizado um teste de campo utilizando-se quatro pontos de controle, ilustrados na Fig. 2, cujos valores de referência de nível são conhecidos, e onde se determinaram as altitudes geométricas. Uma vez que os rastreadores GPS fornecem apenas as diferenças relativas entre os pontos medidos, os valores absolutos das alturas geoidais,  $N$ , não serão conhecidos com exatidão, portanto, a precisão do mapa geoidal poderá ser averiguada comparando-se as diferenças dos valores de  $N$  entre as estações de controle de campo e suas respectivas diferenças obtidas no mapa (Kearsley, 1988). Considerando-se duas estações,  $A$  e  $B$ , a comparação entre os seus valores será:

$$\begin{aligned} N_A &= H_A - h_A \\ N_B &= H_B - h_B \\ \delta N_{AB}^{RN-GPS} &= N_B - N_A = \delta H_{AB} - \delta h_{AB}, \end{aligned} \quad (20)$$

onde  $H_A$ ,  $H_B$ ,  $h_A$  e  $h_B$  são as respectivas altitudes ortométricas e geométricas das estações, e  $N_A$  e  $N_B$





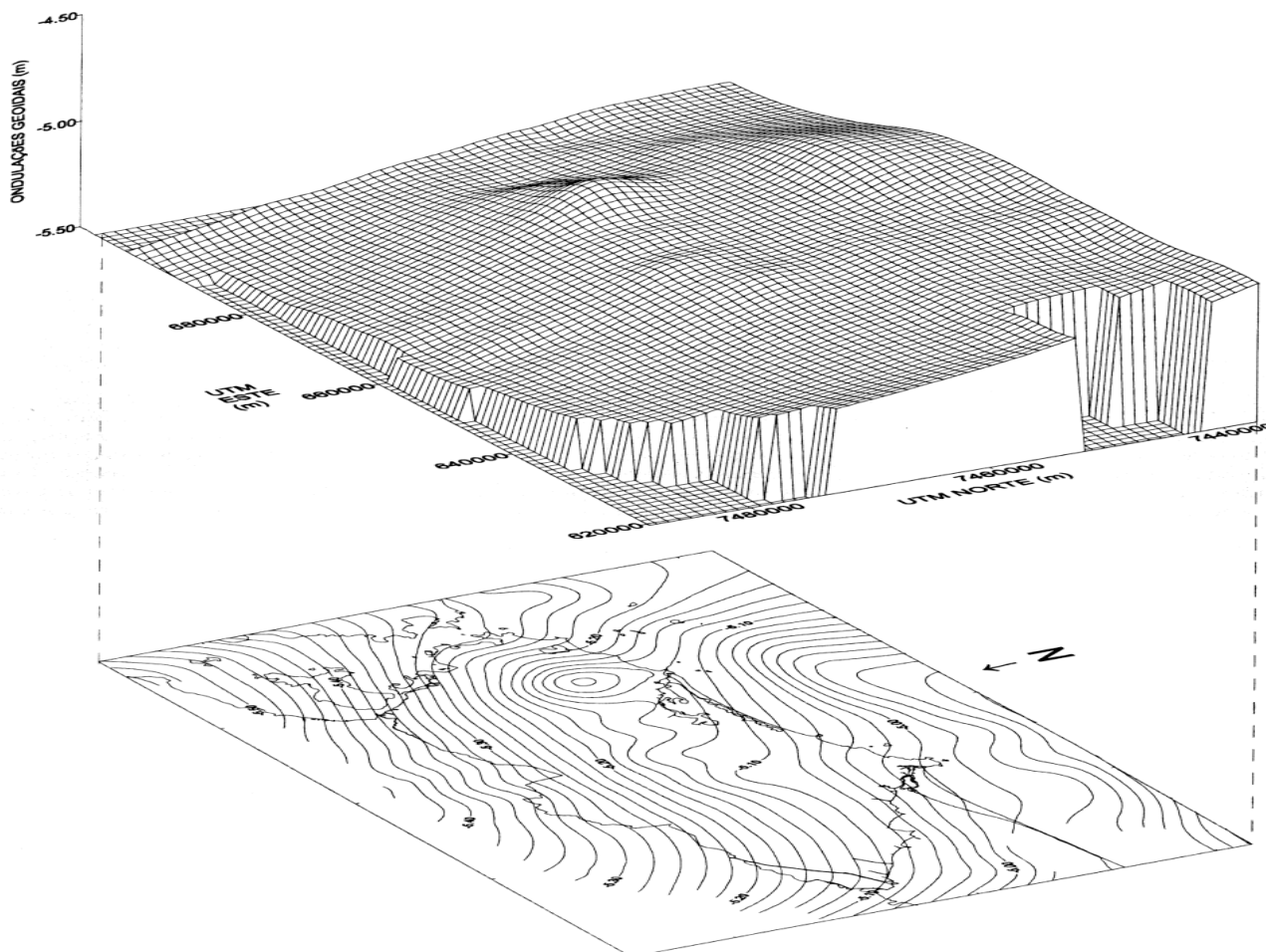
**Figura 4** - Visão perspectiva da superfície geoidal (PV a sudoeste).  
**Figure 4** - Perspective view of geoidal surface (VP on SW).

são as suas alturas geoidais. Portanto, serão comparados os valores de  $\delta N_{AB}^{RN-GPS}$  determinados no campo, com os valores de  $\delta N_{AB}^{MAPA}$  extraídos do mapa. Os valores das altitudes,  $H$ , referem-se às cotas de nível de 1ª ordem fornecidas pelo IBGE e pela Empresa Municipal de Informática e Planejamento - Iplanrio, e os valores das altitudes geométricas,  $h$ , foram obtidas com o emprego de dois receptores GPS, modelo 4000SE Land Surveyor, da Trimble Navigation.

Infelizmente, a localização dos 14 pontos de cotas de nível conhecidas que foram utilizados no levantamento gravimétrico (exceto a estação RN-1020D), por estarem muito próximos a prédios urbanos ou à mata fechada, impossibilitou o rastreamento dos satélites e, por esta razão, não puderam ser usados no teste de precisão do mapa. Foram, então, escolhidos

outros pontos (em número de sete) para efetuar o teste. No entanto, destes sete pontos escolhidos, apenas quatro foram efetivamente utilizados na comparação, pois, em três deles havia dúvidas quanto aos valores fornecidos das altitudes ortométricas (RRNN). Os dados de GPS foram obtidos após um período de observação de duas horas para cada estação, utilizando-se quatro receptores geodésicos operando no modo estático, em frequência simples. Na redução dos dados foi usado o programa GPSURVEY, fornecido pelo próprio fabricante para o cálculo do posicionamento plani-altimétrico das estações.

Na Tab. 1 estão expostos os valores referentes às diferenças entre os desníveis ortométricos e geométricos dos quatro pontos, assim como as distâncias entre as bases e tempos de rastreamento. A tabela expõe os percursos e os valores obtidos ao se



**Figura 5** - Visão perspectiva da superfície geoidal (PV a noroeste).

**Figure 5** - Perspective view of geoidal surface (VP on NW).

tomar, individualmente, cada ponto como origem para o controle dos demais. Desta forma, as comparações são realizadas em todos os pares possíveis de pontos, e evita-se a influência de algum erro local. Para as quatro estações de controle utilizadas, RN-5304, RN-1238, RN-1290A e RN-1020D, obtemos as seis comparações possíveis, apresentadas na tabela. Os índices *A* e *B* referem-se, respectivamente, às estações tomadas como “Origem” e “Destino” em cada comparação. Os dados constantes da linha “Diferença  $\partial N_{AB} = \delta N_{AB}^{RN-GPS} - \delta N_{AB}^{MAPA}$ ” fornecem o valor da diferença média obtida, igual a -3,7 cm, e o erro médio quadrático das diferenças, igual a  $\pm 6$  cm. Portanto, nesta comparação, a precisão do mapa geoidal está situada abaixo de  $\pm 10$  cm, que é um resultado semelhante ao encontrado em trabalhos análogos, p. ex., Sideris & She (1995) e Denker & Wenzel (1987). Na Tab. 1 estão discriminadas, também, as respectivas diferenças em ppm (partes por milhão), que nos dão a precisão relativa de cada comparação, calculada em função da

diferença,  $\partial N_{AB} = \delta N_{AB}^{RN-GPS} - \delta N_{AB}^{MAPA}$ , e da distância entre as estações de controle através da relação  $\text{ppm} = \text{diferença} \div \text{distância}$ . A precisão relativa obtida varia de 0 a 13 ppm para as distâncias de 1 km a 48 km. A tabela expõe, ainda, os valores para a precisão vertical do receptor GPS, dada uma distância  $\overline{AB}$  entre as estações, em operação no modo estático, frequência simples, cujo valor típico fornecido pelo fabricante é  $\sigma_{GPS} = \pm 2 \text{ cm} \times 2 \text{ ppm} \times \overline{AB}$  (Trimble, 1995). Sabendo-se que a precisão das diferenças de cotas de nível,  $\delta H_{AB}$ , está situada abaixo de  $\pm 1$  cm, temos que considerar o fato de que a acurácia dos dados obtidos com este equipamento GPS, sendo proporcional à distância  $\overline{AB}$ , pode interferir na análise da precisão do geóide gravimétrico, “disfarçando” o resultado no teste, não obstante ser este o método que se tem disponível para efetuarmos esta comparação (p. ex., para uma distância  $\overline{AB} = 10 \text{ km}$ , temos que  $\sigma_{GPS} = \pm 4 \text{ cm}$ ). A precisão deste equipamento pode, no entanto, se situar dentro

da precisão de  $\pm 10$  cm, esperada para o mapa geoidal, bastando-se, para isto, controlar a distância entre as estações rastreadas, o que, por razões de logística, não foi possível neste trabalho. Pretende-se, em trabalhos posteriores, proceder à densificação das referências de nível e o rastreamento com GPS nesta área, permitindo um teste mais acurado do mapa. Outrossim, é muito importante mencionar que o próprio mapa do geóide gravimétrico é que nos permitiu suspeitar dos valores incorretos das altitudes das RRNN que não puderam ser incluídas neste teste, fato este que foi confirmado pelas próprias instituições fornecedoras daqueles valores.

## Considerações Finais

Caberia tecer aqui algumas considerações e propostas de trabalho que julgamos necessário (além do adensamento gravimétrico), objetivando ressaltar a gravimetria como um efetivo instrumento na investigação das feições geoidais com boa acurácia.

(a) O país ainda carece de informação gravimétrica em áreas extensas, e, por esta razão, o modelo de geopotencial contém imprecisões nos coeficientes de graus mais elevados. Um estudo de interesse seria o refinamento do modelo de geopotencial com a inclusão de dados gravimétricos

locais. Este procedimento ajudaria a resolver problemas relativos aos longos comprimentos de onda do geóide na área em estudo, e compatibilizaria (ou melhoraria) a sua resolução, inclusive para graus superiores a 360. Esta técnica foi descrita em (Li & Sideris, 1994), e é chamada “tailoring”, uma vez que o modelo de geopotencial é “costurado” com dados de anomalia local para refiná-lo. No nosso trabalho foi realizado um teste, utilizando-se o modelo OSU91A truncado em grau e ordem 180, porém, o emprego do modelo completo apresentou resultados melhores na comparação com o geóide obtido com GPS.

(b) Pela escassez de informação na área oceânica, a gravimetria marinha não fornece dados suficientes para uma melhor avaliação da qualidade dos dados dos satélites altimétricos, fato que é mais percebido em trabalhos de grande extensão (como, por exemplo, o mapa geoidal do país com boa resolução). Portanto, é interessante realizar-se um ajustamento da informação disponível na área oceânica para verificação da acurácia dos dados de GEOSAT, o que, normalmente, é feito através de aferição por “cruzamento” dos conjuntos de dados.

(c) É importante o conhecimento preciso dos valores das altitudes ortométricas do ponto de vista dinâmico. Escobar (1991) descreve uma técnica para o ajustamento das altitudes ortométricas utilizando da-

Origem (estação A)	RN5304			RNI238		RNI290A
Destino (estação B)	RNI238	RNI290A	RNI020D	RNI290A	RNI020D	RNI020D
<b>Desnível ortométrico</b> $\delta H_{AB}$ (m)	-3,093	-1,579	-1,944	+1,514	+1,149	-0,365
<b>Desnível geométrico</b> $\delta h_{AB}$ (m)	-2,952	-1,440	-2,086	+1,512	+0,866	-0,646
<b>Diferença RN-GPS</b> $\delta N_{AB}^{RN-GPS} = \delta H_{AB} - \delta h_{AB}$ (cm)	-14	-14	+14	0	+28	+28
<b>Diferença extraída do mapa</b> $\delta N_{AB}^{MAPA}$ (cm)	-5	-5	+18	0	+24	+24
<b>Diferença</b> $\delta N_{AB} = \delta N_{AB}^{RN-GPS} - \delta N_{AB}^{MAPA}$ (cm)	-9	-9	-4	0	-4	+4
<b>Distância entre estações</b> (km)	7	7	41	1	47	48
<b>Precisão relativa diferença ÷ distância</b> (ppm)	13	13	1	0	1	1
<b>Tempo de ocupação GPS</b> (h)	2	2	2	2	2	2
<b>Precisão vertical do equipamento GPS</b> $\pm 2 \text{ cm} + 2 \text{ ppm} \times AB$	$\pm 2,7$	$\pm 2,7$	$\pm 6,1$	$\pm 2,1$	$\pm 6,7$	$\pm 6,8$

**Tabela 1** - Comparação entre os valores (RN-GPS) e mapa geoidal.

*Table 1* - Comparison between (RN-GPS) and geoidal map data.

dos gravimétricos através do conceito de número geopotencial. Esta metodologia, testada com sucesso na rede de nivelamento geométrico no sul do Brasil, pode ser estendida às RRNN no restante do país. Num ajustamento global seria também incluída toda a informação maregráfica existente, procedendo-se, ainda, à conexão gravimétrica daqueles marégrafos de maior confiabilidade.

(d) Na solução de Stokes, pode-se averiguar o emprego da técnica espectral aplicada a um modelo elipsoidal. Obviamente, é mais interessante, aqui, o mapeamento de áreas de grande extensão, para comparação com a técnica tradicional onde se utiliza o modelo esférico. A formulação para o modelo elipsoidal no domínio do espaço já foi averiguada por alguns autores, como, por exemplo, nos trabalhos de Rapp (1981) e de Moritz (1980).

## CONCLUSÕES

As ondulações geoidais na região do Município do Rio de Janeiro foram determinadas pelo método gravimétrico, cujos resultados são compatíveis com trabalhos semelhantes de determinação local do geóide. A coerência externa do mapa geoidal obtido foi averiguada comparando-se com o geóide determinado a partir de levantamento GPS sobre referências de nível de 1ª ordem, e revelou uma precisão de  $\pm 6$  cm nas diferenças entre as quatro estações utilizadas no teste. Tal resultado vem confirmar a praticidade do método gravimétrico para o traçado da feição geoidal local como apoio a trabalhos geofísicos, geodésicos e de engenharia, dentre outros, mesmo em regiões de relevo acidentado, como a área estudada. Isto se deve sobretudo à homogeneidade na distribuição espacial dos dados gravimétricos, assim como a discretização da área em células de  $2' \times 2'$  de extensão, o que minimiza a imprecisão no cálculo das anomalias médias por interpolação. Foi utilizada a metodologia clássica de Stokes, pois pretende-se que o presente trabalho sirva, também, como base para a comparação com outras técnicas de traçado geoidal a serem investigadas nesta mesma área teste, como, por exemplo, as técnicas baseadas nos métodos espectrais por FFT (p. ex., Haagmans et al., 1993).

## AGRADECIMENTOS

Agradecemos ao Dr. Marcelo C. dos Santos (UFPr) e ao Dr. Nelsi C. de Sá (IAG/USP) pelas valiosas colaborações dadas, ao Dr. Denizar Blitzkow (Instituto Politécnico/USP) pela gentil cessão dos programas computacionais da equipe do Dr. M. Sideris

(University of Calgary), assim como ao pessoal do DGE/ON, e às instituições IBGE e Iplanrio, pelo auxílio valioso na fase de testes. Agradecemos, também, a Fernando J. S. e S. Dias, Carlos L. R. Póvoa, José J. Dantas, e, particularmente, à memória do nosso caro amigo Arlindo Jorge Cavalcante Soares, pelos estímulos auxílios nos trabalhos de campo e processamento dos dados.

## REFERÊNCIAS

- ANDERSON, A. J. & CAZENAVE, A.-1986** – Space Geodesy and Geodynamics. Academic Press, London, 490pp.
- ARABELOS, D. & TZIAVOS, I. N.-1983** - Determination of deflections of the vertical using a combination of spherical harmonics and gravimetric data for the area of Greece. Bull. Géod., **57**: 240-256.
- BOMFORD, G.-1977** - Geodesy, 3ª ed., Oxford University Press, 731pp.
- DENKER, H. & WENZEL, G.-1987** - Local geoid determination and comparison with GPS results. Bull. Géod., **61**: 349-366.
- ESCOBAR, I. P.-1991** - Altitude: Conceituação, Realização, Modelamento Matemático e Ajustamento, Tese de Doutorado, Universidade de São Paulo, 144pp.
- GEMAEL, C.-1981** - Introdução à Geodésia Física. Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas, UFPr, Curitiba.
- GIL, A. J., SEVILLA, M. J. & RODRÍGUEZ-CADEROT G.-1993** - Geoid determination in central Spain from gravity and height data. Bull. Géod., **67**: 41-50.
- HAAGMANS, R., MIN, E. DE & GEDEREN, M. VAN-1993** - Fast evaluation of convolution on the sphere using 1D-FFT, and a comparison with existing methods for Stokes' integral. Manusc. Geod., **18**: 227-241.
- HEES, G. S. VAN-1986** - Precision of the geoid, computed from terrestrial gravity measurements. Manusc. Geod., **11**: 86-98.
- HEISKANEN, W. & MORITZ, H.-1967** - Physical Geodesy. W. H. Freeman and Company, San Francisco, 364pp.
- KARPYCHEV, M. & FLEITOUT, L.-1996** – Simple considerations on forces driving plate motion and on the plate-tectonic contribution to the long-wavelength geoid. Geophys. J. Int., **127**: 268-282.
- KEARSLEY, A. H. W.-1988** - Tests on the recovery of precise geoid height differences from gravimetry. J. Geophys. Res., **93** (B6): 6559-6570.
- LAMBECK, K.-1988** - Geophysical Geodesy. The Slow Deformations of the Earth. Clarendon Press, Oxford, 718pp.
- LI, Y. C. & SIDERIS, M. G.-1994** - Minimization and estimation of geoid undulation errors. Bull. Géod., **68**: 201-219.
- MAINVILLE, A., FORSBERG, R. & SIDERIS, M. G.-1992** - Global Positioning System testing of geoids computed from geopotential models and local gravity data:

- a case study. *J. Geophys. Res.*, **97** (B7): 11137-11147.
- MORITZ, H.-1980** - *Advanced Physical Geodesy*. Tunbridge Wells, Kent, England, 500p.
- MORITZ, H.-1984** - Geodetic Reference System 1980. *Bull. Géod.*, **58** (3): 388-398.
- RAPP, R. H.-1981** - Ellipsoidal corrections for geoid undulation computations using gravity anomalies in a cap. *J. Geophys. Res.*, **86** (B11): 10843-10848.
- RAPP, R. H., WANG, Y. M. & PAVLIS, N. K.-1991** - The Ohio State University 1991 geopotential and sea surface topography harmonic coefficient models. Report No. 410, Department of Geodetic Science and Surveying, The Ohio State Univ., Columbus, 94pp.
- RIKITAKE, T., SATO, R. & HAGIWARA, Y.-1985** - *Applied Mathematics for Earth Scientists*. Terra Scientific Publishing Co., Tokyo, 435pp.
- RUPERT, J.-1988** - A gravitational terrain correction program for IBM compatible personal computers. Vol. 2.21, Geological Survey of Canada, GSC, Open File 1834, 20pp.
- SÁ, N. C. DE & MOLINA, E. C.-1995** - O geóide gravimétrico no Estado de São Paulo. Anais do XVII Congresso Brasileiro de Cartografia, São Paulo.
- SANTOS, N. P.-1997** - Determinação Gravimétrica das Ondulações Geoidais na Região do Município do Rio de Janeiro. Dissertação de Mestrado, Observatório Nacional, Rio de Janeiro, 110pp.
- SCHWARZ, K. P., SIDERIS, M. G. & FORSBERG, R.-1990** - The use of FFT techniques in physical geodesy. *Geophys. J. Int.*, **100**: 485-514.
- SIDERIS, M. G. & SHE, B. B.-1995** - A new, high-resolution geoid for Canada and part of the U. S. by the 1D-FFT method. *Bull. Géod.*, **69**: 92-108.
- STOKES, G. G.-1849** - On the variation of gravity on the surface of the earth. In: *Mathematical and Physical Papers*, Vol. **II**: 131-171 (from the *Trans. of the Cambridge Philos. Soc.* Vol. **VIII**: 672-695, N.Y).
- TORGE, W.-1980** - *Geodesy, an introduction*. Walter de Gruyter & Co., Berlin, 254pp.
- TRIMBLE NAVIGATION LIMITED-1995** - *Application Guide Series 4000*, 241pp.

*Manuscript submitted September 11, 1999*  
*Revised version accepted March 30, 2000*

## GRAVIMETRIC GEOID DETERMINATION IN THE MUNICIPALITY OF RIO DE JANEIRO AND NEARBY REGION

The geoid, commonly used as a reference in altimetry for most of our activities, is an equipotential surface of the terrestrial gravity field, supposedly coincident with the mean sea level. The altimetric positioning of a station is the vertical distance between geoid and terrain surface - orthometric altitude. Indeed, the traditional method of altimetric determination, spirit levelling, is a laborious topographic operation in which orthometric altitudes are transported from mean sea level registers onto the benchmarks.

Nevertheless, recent use of GPS measurements help us to solve the difficulties involved in plani-altimetric positioning of the gravity stations, furnishing coordinates quickly and precisely, although the altitudes are related to the surface of the reference ellipsoid, adopted as the theoretical approximation of the Earth's shape - and not to the geoid. Hence, it is required to find out the distances ( $N$ ) between the two surfaces to have orthometric altitudes, and for the wide use of GPS derived orthometric heights.

We applied the classical methodology to solve Stokes integral for the terrestrial data. The nearby region around a gravimetric station were subdivided in cells of  $2' \times 2'$  of width to compute the geoidal height on that station, and so on for the others. The values of the mean free air anomalies (on the cells) were evaluated by interpolation. The indirect effect was computed using Helmert's Second Condensation Method, which yields the smallest value

of this effect in gravimetric reductions. These data, which correspond to the short wavelength component of geoid spectrum, was combined with values obtained by geopotential expansion to give the actual geoidal height on each cell. We used OSU91A geopotentials coefficients, complete to the order and degree 360. Then, the value of  $N$  on each cell was computed by the sum

$$N = N_{Model} + N_{Stokes} + N_{Effect},$$

in which the computation of the geoid was dropped into these three steps:

- (1) computation of the spheroidal component, obtained via OSU91A geopotential model;
- (2) computation of the component related to gravity anomalies, which has been further subdivided into three items: (i) consideration of the gravity anomalies due to geopotential model, in which long wavelength components are removed earlier to be computed later on the reckoning of  $N$  ("remove-restore technique"); (ii) contribution of the gravimetric data (residual free-air anomalies) using Stokes formula; and (iii) contribution due to terrain correction.
- (3) computation of the component related to indirect effect.

We used the well-known Stokes formula, in a suitable way for integral discretization,

$$N_{Stokes} = \frac{R \Delta \theta \Delta \lambda}{4 \pi \bar{\gamma}} \sum_{\phi_1}^{\phi_M} \sum_{\lambda_1}^{\lambda_N} S(\psi) \Delta g \cos \phi, \quad \text{in}$$

which the worked area was subdivided into  $M = 14$  parallels by  $N = 25$  meridians, thus comprising 350 cells of width  $2' \times 2'$ . Hence, this equation yielded 350 values of geoidal heights to draw the shape of the geoid. The term  $\Delta g$  was computed as described in item (2).

Gravimetric data was collected in a survey accomplished in 1991 by Observatorio Nacional and Escola de Instrução Especializada do Exército, covering a total of 310 LaCoste & Romberg stations with 2400 m average distance. Plani-altimetric positioning of the stations was obtained using municipal maps in scales 1:2,000 and 1:10,000, whence 14 of them were coincident with benchmarks. Indeed, we computed terrain corrections and indirect effect using the digital terrain model obtained by digitalization of 1:50,000 charts. On the outside area, 36 free-air anomaly data (northeast area) were joined with ocean data (southeast area) - GEOSAT satellite information of width  $2' \times 2'$  - to compute medium and short wavelength components of the geoid spectrum. The Geodetic Refer-

ence System GRS80 was adopted as the reference surface for the whole computation.

Geoidal heights vary within -5.00 m and -5.50 m, thus within a range of 0.50 m on the whole area, and the results are consistent with a geoidal map of São Paulo area (Sá & Molina, 1995). The rough interval on Maciço da Tijuca (Fig. 3, between UTM 650000 x 7455000 m and UTM 680000 x 7465000 m) is probably due to local geological structures, basically consisting of mafic and ultramafic high density rocks, although within a range of just 0.10 m in geoidal height. On the remaining area, in spite of the used contour interval (0.02 m), the surface is very smooth. The map information was checked with GPS/levelling derived geoidal heights in which successive differences between map and GPS/levelling altitudes were compared. This pointed out a difference of  $\pm 6$  cm (rms) on four available tested benchmarks, showing that map accuracy is better than  $\pm 10$  cm, likewise similar local gravimetric geoids. The average difference was around -4 cm and values are pictured in Tab. 1.

## **PÓS-GRADUAÇÃO EM CIÊNCIA ESPACIAL / GEOFÍSICA ESPACIAL**

### **MESTRADO E DOUTORADO**

#### **ÁREAS DE PESQUISA:**

ALTA ATMOSFERA, ELETRICIDADE ATMOSFÉRICA, GEOMAGNETISMO,  
IONOSFERA, LUMINESCÊNCIA ATMOSFÉRICA  
MAGNETOSFERA - HELIOSFERA, MÉDIA E BAIXA ATMOSFERA

INPE - Serviço de Pós-Graduação  
Caixa Postal 515  
12201-970 São José dos Campos, SP  
Fone: (012) 3945-6846 FAX: (012) 3945-6850